

ALINA PARASCHIVA
SILVIU DĂNEȚ

matematică

Formule și noțiuni generale

clasele

IX-XII

CORINT
EDUCAȚIONAL

Cuprins

Prefață	3
---------------	---

ALGEBRĂ

I. Mulțimi	5
1. Relații între mulțimi	5
2. Operații cu mulțimi	7
II. Elemente de logică matematică	11
1. Propoziții	11
2. Predicate	16
3. Inducția matematică	17
III. Mulțimea numerelor reale	18
1. Noțiuni generale	18
2. Partea întreagă, partea fracționară	19
3. Modulul unui număr real	20
4. Opusul unui număr real	21
5. Inversul unui număr real	21
6. Operații cu numere reale	21
7. Puteri	22
8. Radicali	24
9. Intervale de numere reale	26
10. Medii de numere reale	28
11. Inegalități clasice remarcabile	29
IV. Ecuații	31
1. Noțiuni generale	31
2. Ecuații algebrice	32
3. Ecuații iraționale	35
V. Funcții	36
1. Noțiuni generale	36
2. Funcții numerice	39
3. Tipuri de funcții numerice importante	45

VI. Progresii	62
1. Progresii aritmetice	62
2. Progresii geometrice	63
VII. Numere complexe	65
1. Numere complexe sub formă algebrică	65
2. Numere complexe sub formă trigonometrică	70
3. Numere complexe sub formă exponențială	73
VIII. Elemente de combinatorică	75
1. Permutări	75
2. Aranjamente	76
3. Combinări	76
4. Binomul lui Newton	77
5. Triunghiul lui Pascal	79
IX. Polinoame	80
1. Noțiuni generale	80
2. Forma algebrică a polinoamelor cu o nedeterminată	82
3. Gradul unui polinom	83
4. Egalitatea a două polinoame	83
5. Operații cu polinoame	83
6. Rădăcini multiple	89
7. Relații între rădăcini și coeficienți (relațiile lui Viète)	91
8. Rădăcinile polinoamelor cu coeficienți reali, raționali, întregi	92
X. Matrice și determinanți	93
1. Matrice	93
2. Determinanți	98
3. Inversa unei matrice	104
4. Ecuații matriceale	105
5. Rangul unei matrice	105
6. Clase speciale de matrice	106

XI. Sisteme de ecuații liniare	109
1. Noțiuni generale	109
2. Metode de rezolvare a sistemelor liniare	111
3. Sisteme de ecuații liniare omogene	115
XII. Legi de compoziție	117
1. Lege de compoziție	117
2. Parte stabilă	117
3. Lege de compoziție indusă	118
4. Tabla unei legi de compoziție	118
5. Proprietățile unei legi de compoziție	118
XIII. Structuri algebrice	120
1. Noțiuni generale	120
2. Structuri algebrice cu o lege de compoziție	120
3. Structuri algebrice cu două legi de compoziție	123

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. Șiruri	129
1. Noțiuni generale	129
2. Șiruri monotone	129
3. Șiruri mărginite	130
4. Subșir al unui șir	131
5. Vecinătăți	131
6. Limita unui șir	131
7. Șiruri convergente	133
8. Convergență și mărginire	134
9. Criterii de convergență/divergență a șirurilor	134
10. Operații cu șiruri convergente	136
11. Cazuri de trecere la limită rezolvate	139
12. Cazuri de nedeterminare (exceptate)	140
13. Limite remarcabile de șiruri	140

14. Șiruri definite prin relații de recurență	142
15. Exemple de calculare a limitelor	145
II. Limite de funcții.....	147
1. Punct de acumulare	147
2. Limita unei funcții într-un punct	148
3. Limite laterale	148
4. Trecerea la limită în inegalități	149
5. Operații cu limite de funcții	150
6. Criterii pentru calcularea de limite de funcții	151
7. Cazuri de nedeterminare	151
8. Limite remarcabile	152
III. Funcții continue	154
1. Noțiuni generale	154
2. Continuitate laterală. Discontinuitate	154
3. Clase de funcții continue	155
4. Operații cu funcții continue	155
5. Proprietățile funcțiilor continue	156
IV. Funcții derivabile	158
1. Noțiuni generale	158
2. Clase de funcții derivabile	161
3. Reguli de derivare	161
4. Derivate de ordin superior	162
5. Derivata unei funcții compuse	162
6. Derivata unei funcții inverse	163
7. Derivatele funcțiilor elementare și compuse	163
8. Puncte de extrem local (relativ)	166
9. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor	167
10. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune	177
11. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere	179
12. Asimptote	180

V. Reprezentarea grafică a funcțiilor	182
1. Etapele reprezentării grafice a unei funcții	182
2. Aplicații ale reprezentării grafice a funcțiilor	183
VI. Primitive	184
1. Noțiuni generale	184
2. Integrala nedefinită	184
3. Clase de funcții care admit primitive	185
4. Integrare. Metode de integrare	189
5. Primitive uzuale	191
6. Integrarea funcțiilor raționale simple	195
7. Integrarea funcțiilor raționale	197
8. Integrarea funcțiilor iraționale	199
9. Integrarea unor funcții transcendente	203
10. Integrala binomă	204
VII. Integrale definite	205
1. Diviziuni	205
2. Sume Darboux, sume Riemann	206
3. Integrala definită	207
4. Clase de funcții integrabile	209
5. Interpretarea geometrică a integralei definite	210
6. Proprietăți ale integralelor definite	210
7. Formula Leibniz–Newton	213
8. Formula de medie	213
9. Formula de integrare prin părți	214
10. Formula primei schimbări de variabilă	214
11. Formula celei de-a doua schimbări de variabilă	214
12. Aplicații ale integralelor definite	215
13. Integrala improprie	216
14. Diferențiala	218
15. Ecuații diferențiale	219

GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

I. Vectori legați	221
1. Noțiuni generale	221
2. Vectori legați echipolenți	223
3. Operații cu vectori legați	223
4. Raportul în care un punct împarte un segment orientat	225
II. Vectori liberi	226
1. Noțiuni generale	226
2. Operații cu vectori liberi	227
3. Descompunerea unui vector liber după două direcții date	230
4. Vectori paraleli	231
5. Coordonatele unui vector liber în plan	231
6. Lungimea unui vector liber în plan	233
7. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan	234
8. Coordonatele unui vector liber în spațiu	234
9. Lungimea unui vector liber în spațiu	236
10. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu	236

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

I. Reper cartezian în plan și spațiu	237
1. Reperul cartezian	237
2. Distanța dintre două puncte	239
II. Ecuațiile planului	240
1. Ecuația normală a planului	240
2. Ecuația generală a planului	240
3. Ecuația planului care trece prin trei puncte necoliniare	240
4. Ecuații particulare	241
III. Poziții relative a două plane	243

IV. Ecuațiile drepte în plan și spațiu	245
1. Ecuația parametrică a dreptei	245
2. Ecuația canonică a dreptei	245
3. Ecuația drepte determinate de două puncte distincte ...	246
4. Ecuația explicită a dreptei	246
5. Ecuația generală a dreptei	247
V. Poziții relative ale unei drepte față de un plan ..	248
VI. Poziții relative a două drepte	249
VII. Conice	250
1. Tipuri de conice	250
2. Poziții relative ale unei drepte față de o conică	252
3. Poziții relative a două conice	252
4. Ecuațiile tangentelor la conice	252
GEOMETRIE SINTETICĂ	
I. Arii și volume pentru corpuri	254
1. Arii și volume pentru prisme	254
2. Arii și volume pentru piramide	256
3. Arii și volume pentru trunchiuri de piramidă	258
4. Arii și volume pentru corpuri rotunde	261
TRIGONOMETRIE	
I. Măsurarea unghiurilor	264
1. Gradul	264
2. Radianul	264
3. Relația de transformare grade sexagesimale – radiani	265
II. Cercul trigonometric	266

ALGEBRĂ

Capitolul I

Mulțimi

1. Relații între mulțimi

1.1. Apartenența unui element la o mulțime

Fie A o mulțime inclusă într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiții:

♦ Un element x **aparține** unei mulțimi A dacă se află în acea mulțime.

Notatie: $x \in A$.

Se citește: x aparține lui A .

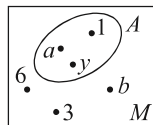
♦ Un element x **nu aparține** unei mulțimi A dacă nu se află în acea mulțime.

Notatie: $x \notin A$.

Se citește: x nu aparține lui A .

♦ Dacă mulțimea A nu are nici un element se numește **mulțime vidă**.

Notatie: $A = \emptyset$.



1.2. Incluziunea unei mulțimi în altă mulțime

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

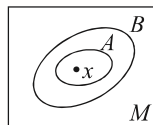
Definiții:

♦ Mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element x din A se află în B .

Notatie: $A \subset B$ sau $B \supset A$.

Se citește: A inclus în B sau B include A .

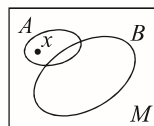
Avem: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ avem } x \in B$.



♦ Mulțimea A **nu este inclusă** în mulțimea B dacă există cel puțin un element din A care nu se află în B .

Notatie: $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$.

Se citește: A nu este inclus în B sau B nu include A .



Avem: $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A$ astfel încât $x \notin B$.

Proprietățile incluziunii:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. reflexivitate: $A \subset A, \forall A \subset M$;
2. antisimetrie: $(A \subset B \text{ și } B \subset A) \Rightarrow A = B, \forall A, B \subset M$;
3. tranzitivitate: $(A \subset B \text{ și } B \subset C) \Rightarrow A \subset C, \forall A, B, C \subset M$;
4. $\emptyset \subset A, \forall A \subset M$.

Observație: Dacă $A \subset B$, atunci A este o submulțime a lui B .

Definiție: Dacă A este o mulțime, atunci mulțimea formată din toate submulțimile lui A se numește **mulțimea părților lui A** .

Notatie: $\mathcal{P}(A)$.

Observații:

1. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
2. $A \in \mathcal{P}(A)$.
3. Dacă A are n elemente, $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente.

1.3. Egalitatea mulțimilor

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiție: Mulțimea A este egală cu mulțimea B dacă A este inclusă în B și B este inclusă în A .

Notatie: $A = B$.

Se citește: A egală cu B .

Avem: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$.

Observație: Două mulțimi sunt egale dacă un element al uneia este și al celeilalte, și invers.

Proprietățile egalității:

Fie M mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *reflexivitate:* $A = A, \forall A \subset M$;
2. *simetrie:* $A = B \Rightarrow B = A, \forall A, B \subset M$;
3. *tranzitivitate:* $(A = B \text{ și } B = C) \Rightarrow A = C, \forall A, B, C \subset M$.

2. Operații cu mulțimi

2.1. Complementara unei mulțimi

Fie A o mulțime inclusă într-o mulțime totală (de referință) M .

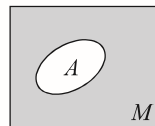
Definiție: Complementara mulțimii

A este mulțimea formată din elementele lui M care nu aparțin lui A .

Notatie: C_A sau $C_M A$.

Se citește: complementara lui A sau complementara lui A în raport cu M

$$C_M A = \{x \mid x \in M, x \notin A\}.$$



Proprietățile complementarei:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $C_M(C_M A) = A, \forall A \subset M$;
2. $C_M A = M \setminus A, \forall A \subset M$;
3. $C_M \emptyset = M$;
4. $C_M M = \emptyset$;
5. $A \cup C_M A = M, \forall A \subset M$ (principiul terțului exclus);
6. $A \cap C_M A = \emptyset, \forall A \subset M$ (principiul noncontradicției);
7. $A \subset B \Rightarrow C_M B \subset C_M A, \forall A, B \subset M$.

2.2. Reuniunea mulțimilor

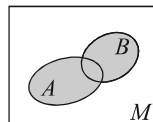
Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiție: Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea formată din elementele lui M care aparțin sau lui A sau lui B .

Notatie: $A \cup B$.

Se citește: A reunit cu B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ sau } x \in B\}$$



Proprietățile reuniunii:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate:* $A \cup B = B \cup A, \forall A, B \subset M$;
2. *asociativitate:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \forall A, B, C \subset M$;
3. *idempotență:* $A \cup A = A, \forall A \subset M$;
4. $A \cup \emptyset = A, \forall A \subset M$.

2.3. Intersecția mulțimilor

Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiții:

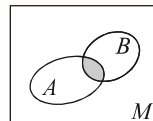
♦ **Intersecția mulțimilor A și B** este mulțimea formată din elementele lui M care aparțin și lui A și B .

Notatie: $A \cap B$.

Se citește: A intersectat cu B .

$$A \cap B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

♦ Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci mulțimile A și B se numesc **disjuncte**.



Proprietățile intersecției:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate:* $A \cap B = B \cap A, \forall A, B \subset M$;
2. *asociativitate:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \forall A, B, C \subset M$;

3. *idempotență*: $A \cap A = A, \forall A \subset M$;
4. $A \cap \emptyset = \emptyset, \forall A \subset M$;
5. $A \cap B \subset A \Rightarrow A \cap B \subset B, \forall A, B \subset M$;
6. *distributivitatea intersecției față de reuniune*:
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \forall A, B, C \subset M$.
7. *distributivitatea reuniunii față de intersecție*:
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \forall A, B, C \subset M$;
8. *absorbție*: $A \cap (A \cup B) = A, A \cup (A \cap B) = A, \forall A, B \subset M$.

2.4. Diferența mulțimilor

Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiție: Diferența mulțimilor A și B , în această ordine, este mulțimea elementelor lui M care aparțin lui A și nu aparțin lui B .

Notatie: $A \setminus B$ sau $A - B$.

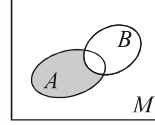
Se citește: A fără B .

$$A \setminus B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

Proprietățile diferenței:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $A \setminus A = \emptyset, \forall A \subset M$;
2. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$
 $\forall A, B, C \subset M$;
3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \forall A, B \subset M$;
4. $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A, \forall A, B \subset M$.



2.5. Diferența simetrică a mulțimilor

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M .

Definiție: Diferența simetrică a mulțimilor A și B este mulțimea obținută ca reuniune a diferențelor $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Notăție: $A \triangle B$.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proprietățile diferenței simetrice:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate*: $A \triangle B = B \triangle A$, $\forall A, B \subset M$;
2. *asociativitate*: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
3. $A \triangle A = \emptyset$, $\forall A \subset M$;
4. $A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A$, $\forall A \subset M$;
5. *distributivitatea intersecției față de diferența simetrică*:
 $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
6. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\forall A, B \subset M$.

2.6. Produs cartezian al mulțimilor

Definiție: Produsul cartezian al mulțimilor A și B , în această ordine, este mulțimea perechilor ordonate având primul element din A și al doilea din B .

Notăție: $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$$

Observație: Produsul cartezian al mulțimilor $A_1, A_2, \dots, A_n$ este:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, \forall i = 1, n\}$$

Proprietățile produsului cartezian:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $A \times B \neq B \times A$, $\forall A, B \subset M$;
2. *distributivitatea produsului cartezian față de reuniune*:
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
3. *distributivitatea produsului cartezian față de intersecție*:
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$.